

Матбой профи-6 — профи-7

1. Даны  $4n$  натуральных чисел ( $n > 10$ ), не превосходящих  $6n$  (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $a$  делится на  $b$ , можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

2. В квадрате  $11 \times 11$  отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате  $2 \times 2$  также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

3. У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число  $a < 1$ , а таракан проползает  $a$  см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?

4. Буквы  $A, B, C, D, E, F, G$  это различные цифры. Известно, что

$$A \cdot B \cdot C = C \cdot D \cdot E = E \cdot F \cdot G$$

. Можно ли однозначно определить значение  $D$ ?

5. Ада и Чарльз играют в следующую игру: в начале на доске написано целое число  $n > 1$ . По очереди Ада и Чарльз стирают с доски найденное ими число  $k$  и заменяют его либо на положительный делитель  $k$ , отличный от 1 и  $k$  (ход 1), либо на  $k + 1$  (ход 2). В начале у каждого игрока по тысяче очков. Когда игрок выбирает ход 1, он/она получает одно очко; когда игрок выбирает ход 2, он/она теряет одно очко. Игра заканчивается, когда у одного из игроков остаётся ноль очков, и этот игрок проигрывает. Ада хо-

дит первой. При каких значениях  $n$  у Чарльза есть выигрышная стратегия?

6. Докажите, что у клетчатого многоугольника с площадью 300 и периметром 300 есть сторона длиной больше 1. (Многоугольник не содержит дырок, т. е. его граница — замкнутая ломаная без самопересечений.)

7. Вокруг тонкого дуба стоят  $2n$  мудрецов так, что каждый мудрец видит всех мудрецов, кроме противоположного. На них надевают шляпы одного из  $2n$  цветов (цвета не повторяются), после чего каждый мудрец называет цвет, в который, по его мнению, покрашена шляпа на нем (цвета шляп известны мудрецам заранее). Какое наибольшее количество мудрецов могут гарантированно отгадать цвет своей шляпы?

8. Дед Мороз раздает детям конфеты. Первому и второму он выдает по одной конфете, третьему и четвертому по две, следующим двоим по 3 и т.д. Всего таким способом он поздравил  $2n$  детей. При каких  $n$  можно расставить детей в ряд так, чтобы у всех, кроме первого и последнего, количество конфет равнялось или сумме, или разности количеств конфет своих соседей?

**Матбой непрофи-6 — непрофи-7**

1. Даны  $4n$  натуральных чисел ( $n > 10$ ), не превосходящих  $6n$  (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $a$  делится на  $b$ , можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

2. В квадрате  $11 \times 11$  отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате  $2 \times 2$  также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

3. У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число  $a < 1$ , а таракан проползает  $a$  см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?

4. Буквы  $A, B, C, D, E, F, G$  это различные цифры. Известно, что

$$A \cdot B \cdot C = C \cdot D \cdot E = E \cdot F \cdot G$$

. Можно ли однозначно определить значение  $D$ ?

5. В торговом центре установили два автомата по продаже шариков с сюрпризом. Первый автомат поочередно выдаёт красные и синие шарики, второй — красные и зеленые. Известно, что девятый и десятый посетитель получили красные шарики, а двадцать четвертый — синий. Можно ли установить, какого цвета шарик получил двадцать пятый посетитель? Номера посетителей считаются в порядке подхода к автоматам. Каждому достаётся ровно один шарик.

6. Однажды Лидочка вышла из дома и пошла в театр. В 12:00 ей встретился велосипедист Миша, едущий вдвое быстрее, чем Лидочка ходит, и предложил подбросить её до того места, откуда до театра будет такое же расстояние, как сейчас от Лидочки до её дома. Лидочка согласилась, а потому уже через час была у дверей театра. Оказалось, что спектакль отменили, потому Лидочка развернулась и пошла домой. Когда она будет дома?

7. Вокруг толстого дуба стоят 4 мудреца так, что каждый мудрец видит мудрецов, стоящих слева и справа от него, но не видит противоположного. На них надевают шляпы одного из четырех цветов (цвета не повторяются), после чего каждый мудрец называет цвет, в который, по его мнению, покрашена шляпа на нем (цвета шляп известны мудрецам заранее). Какое наибольшее количество мудрецов могут гарантированно отгадать цвет своей шляпы?

8. Дед Мороз раздает детям конфеты. Первому и второму он выдает по одной конфете, третьему и четвертому по две, следующим двоим по 3 и т.д. Всего таким способом он поздравил  $2n$  детей. При каких  $n$  можно расставить детей в ряд так, чтобы у всех, кроме первого и последнего, количество конфет равнялось или сумме, или разности количеств конфет своих соседей?

Матбой профи-6 — профи-7

1. Даны  $4n$  натуральных чисел ( $n > 10$ ), не превосходящих  $6n$  (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $a$  делится на  $b$ , можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

2. В квадрате  $11 \times 11$  отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате  $2 \times 2$  также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

3. У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число  $a < 1$ , а таракан проползает  $a$  см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?

4. Буквы  $A, B, C, D, E, F, G$  это различные цифры. Известно, что

$$A \cdot B \cdot C = C \cdot D \cdot E = E \cdot F \cdot G$$

. Можно ли однозначно определить значение  $D$ ?

5. Ада и Чарльз играют в следующую игру: в начале на доске написано целое число  $n > 1$ . По очереди Ада и Чарльз стирают с доски найденное ими число  $k$  и заменяют его либо на положительный делитель  $k$ , отличный от 1 и  $k$  (ход 1), либо на  $k + 1$  (ход 2). В начале у каждого игрока по тысяче очков. Когда игрок выбирает ход 1, он/она получает одно очко; когда игрок выбирает ход 2, он/она теряет одно очко. Игра заканчивается, когда у одного из игроков остаётся ноль очков, и этот игрок проигрывает. Ада хо-

дит первой. При каких значениях  $n$  у Чарльза есть выигрышная стратегия?

6. Докажите, что у клетчатого многоугольника с площадью 300 и периметром 300 есть сторона длиной больше 1. (Многоугольник не содержит дырок, т. е. его граница — замкнутая ломаная без самопересечений.)

7. Вокруг тонкого дуба стоят  $2n$  мудрецов так, что каждый мудрец видит всех мудрецов, кроме противоположного. На них надевают шляпы одного из  $2n$  цветов (цвета не повторяются), после чего каждый мудрец называет цвет, в который, по его мнению, покрашена шляпа на нем (цвета шляп известны мудрецам заранее). Какое наибольшее количество мудрецов могут гарантированно отгадать цвет своей шляпы?

8. Дед Мороз раздает детям конфеты. Первому и второму он выдает по одной конфете, третьему и четвертому по две, следующим двоим по 3 и т.д. Всего таким способом он поздравил  $2n$  детей. При каких  $n$  можно расставить детей в ряд так, чтобы у всех, кроме первого и последнего, количество конфет равнялось или сумме, или разности количеств конфет своих соседей?

**Матбой непрофи-6 — непрофи-7**

1. Даны  $4n$  натуральных чисел ( $n > 10$ ), не превосходящих  $6n$  (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $a$  делится на  $b$ , можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

2. В квадрате  $11 \times 11$  отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате  $2 \times 2$  также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

3. У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число  $a < 1$ , а таракан проползает  $a$  см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?

4. Буквы  $A, B, C, D, E, F, G$  это различные цифры. Известно, что

$$A \cdot B \cdot C = C \cdot D \cdot E = E \cdot F \cdot G$$

. Можно ли однозначно определить значение  $D$ ?

5. В торговом центре установили два автомата по продаже шариков с сюрпризом. Первый автомат поочередно выдаёт красные и синие шарики, второй — красные и зеленые. Известно, что девятый и десятый посетитель получили красные шарики, а двадцать четвертый — синий. Можно ли установить, какого цвета шарик получил двадцать пятый посетитель? Номера посетителей считаются в порядке подхода к автоматам. Каждому достаётся ровно один шарик.

6. Однажды Лидочка вышла из дома и пошла в театр. В 12:00 ей встретился велосипедист Миша, едущий вдвое быстрее, чем Лидочка ходит, и предложил подбросить её до того места, откуда до театра будет такое же расстояние, как сейчас от Лидочки до её дома. Лидочка согласилась, а потому уже через час была у дверей театра. Оказалось, что спектакль отменили, потому Лидочка развернулась и пошла домой. Когда она будет дома?

7. Вокруг толстого дуба стоят 4 мудреца так, что каждый мудрец видит мудрецов, стоящих слева и справа от него, но не видит противоположного. На них надевают шляпы одного из четырех цветов (цвета не повторяются), после чего каждый мудрец называет цвет, в который, по его мнению, покрашена шляпа на нем (цвета шляп известны мудрецам заранее). Какое наибольшее количество мудрецов могут гарантированно отгадать цвет своей шляпы?

8. Дед Мороз раздает детям конфеты. Первому и второму он выдает по одной конфете, третьему и четвертому по две, следующим двоим по 3 и т.д. Всего таким способом он поздравил  $2n$  детей. При каких  $n$  можно расставить детей в ряд так, чтобы у всех, кроме первого и последнего, количество конфет равнялось или сумме, или разности количеств конфет своих соседей?